Chapitre 10 : Application des lois de Newton

Maintenant que nous avons en main un outil super puissant (la deuxième loi de Newton $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$), on va l'utiliser pour trouver toutes les caractéristiques (accélération, vitesse, position) de quelques mouvements. Commençons par le mouvement d'un projectile.

I Etude du mouvement d'un projectile

1) Mouvement d'une balle de golf lancée à la main

On va étudier ce type de mouvement : http://ts.devernay.net/video.html . Faire " Play ". On ne s'intéresse au mouvement qu'à partir du moment où la boule est lancée.

La trajectoire de la balle est une parabole. La vitesse est maximale initialement, diminue lors de la montée puis, est minimale au sommet, puis augmente. En TP, vous avez réalisé les pointages des positions de la balle, on obtient les graphes suivants pour x et y, v_x et v_y et a_x et a_y:
http://ts.devernay.net/graphesProjectile.pdf

Montrons que ces courbes obtenues expérimentalement pouvaient se déduire de la deuxième loi de Newton.

2) Etablissement des équations horaires du mouvement d'un projectile ayant une vitesse initiale

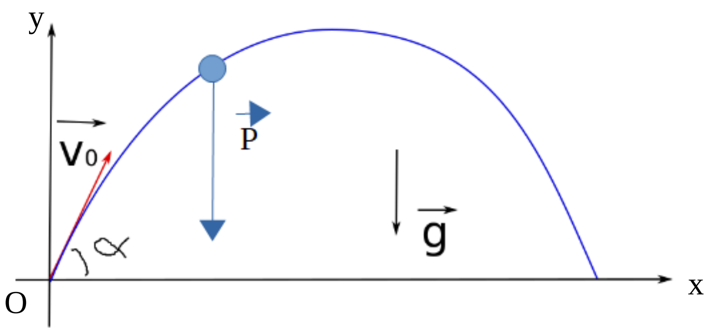
a) détermination de l'accélération

Les équations horaires expriment comment les trois grandeurs (accélération, vitesse, position) évoluent au cours du temps au cours du mouvement de ce projectile. Pour les trouver, il faut appliquer la deuxième loi de Newton au système projectile.

Application de la deuxième loi de Newton :

Système : Boule Référentiel : Terrestre Axes : Ox , Oy

Schéma



$V_0 =$,2 m/s
$\alpha = 65{,}5°$

Bilan des forces : Sur la boule une fois lancée ne s'exerce que le poids $\vec{P}$. Il y a des frottements mais ici on peut les négliger par rapport à la valeur du poids. On sait que : $\vec{P} = m\vec{g}$
$\vec{g}$ est le champ de pesanteur (vertical, vers le bas ,égal à 9,8 $m.s^{-2}$)

2ème loi de Newton : $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ Ici, la résultante des forces $\Sigma \vec{F}$ se résume au poids donc :

$\vec{P} = m\vec{a}$ soit $m\vec{g} = m\vec{a}$ donc $\vec{g} = \vec{a}$

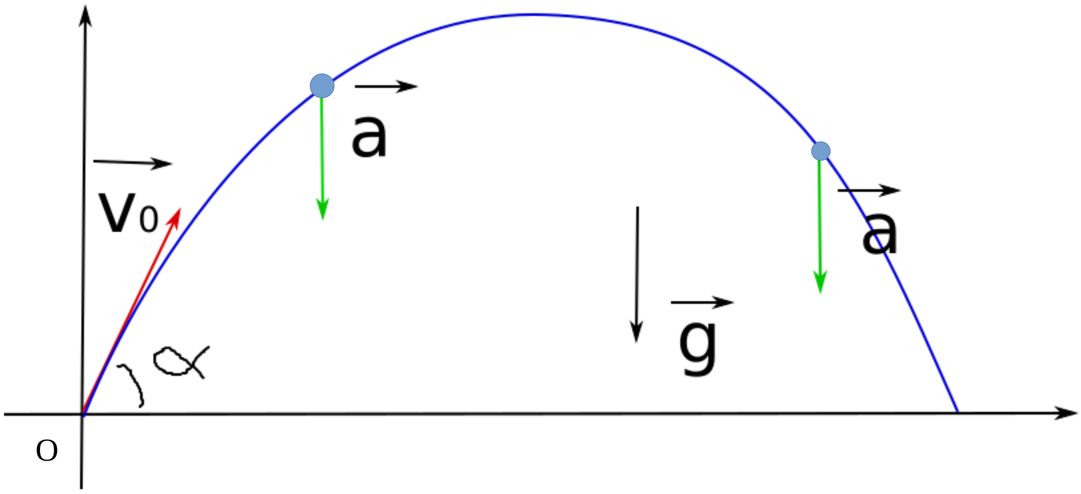
L'application de la première loi de Newton nous fournit un premier résultat :

Au cours de la chute libre d'un système (la chute libre a lieu lorsqu'un système n'est soumis qu'à son poids) , le système a une accélération verticale, vers le bas de valeur :

$a = g = 9{,}8\ m.s^{-2}$

CHUTE LIBRE

Sur le schéma, le vecteur accélération (en vert) se représente donc ainsi :



Dans le repère (O,x,y), les coordonnées du vecteur accélération sont donc puisque $\vec{a}=\vec{g}$:

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -9{,}8 \end{cases}$$

L'accélération ne dépend pas du temps pour une CHUTE LIBRE

Le signe – est là car le vecteur accélération est orienté vers le bas alors que l'axe Oy est orienté vers le haut.
Remarque : L'accélération est la même quelle que soit la masse de l'objet si l'objet est en chute libre (pas de frootements : donc dans le vide) : un marteau et une plume ont la même accélération en chute dans le vide. Un astronaute l'a prouvé sur la Lune :
http://ts.devernay.net/APOLLO_15_Hammer_and_Feather.mp4

b) détermination de la vitesse

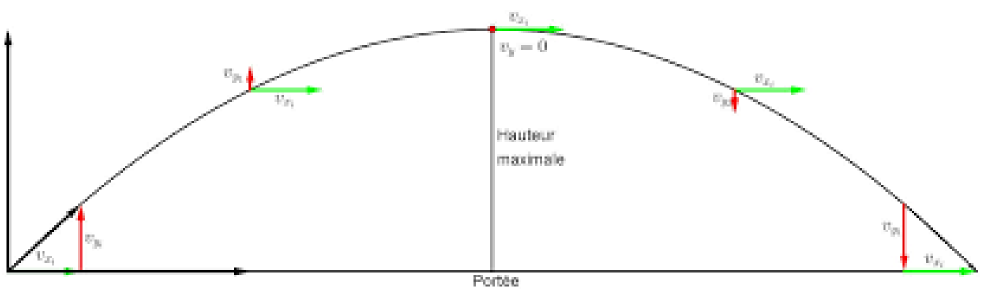
Pour trouver la vitesse v, on va déterminer v_x et v_y. Pour cela, on sait que : l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. Cette affirmation reste vraie pour chacune des coordonnées donc :

$a_x=\frac{dv_x}{dt}$ et $a_y=\frac{dv_y}{dt}$ Pour trouver v_x et v_y , il faut donc trouver les primitives de a_x et a_y par rapport au temps donc :

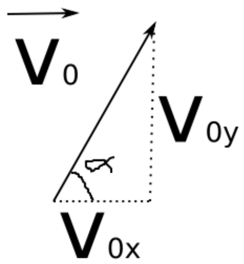
$a_x= 0$ or la primitive de 0 est une constante que je note constante1 soit v_x = constante1
$a_y = -9{,}8$ or la primitive de -9,8 est : -9,8 t + constante2 . constante2 étant une autre constante.

Pour $\vec{v}$: v_x = constante1 et v_y = - 9,81t + constante2

Pour v_x cela veut dire que la vitesse de la boule selon l'horizontale est une constante. Cette image pour comprendre :



En rouge est représentée la composante verticale du vecteur vitesse et en vert la composante horizontale du vecteur vitesse. La composante verte donc v_x a toujours la même longueur. Cette longueur est celle qu'elle a reçu intitialement à t= 0 donc $v_x = v_{ox}$ = constante1. Cela veut dire que le mouvement du **projeté** de la boule sur l'axe (Ox) est uniforme. Preuve : la vidéo de Walter Lewin dans le tp pétanque.
A quoi est égal v_{ox} ?
A t=0, le vecteur vitesse est comme ça :



On dans le triangle : $\cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0}$ donc $v_{0x} = v_0 \times \cos\alpha$ = constante1

donc v_x = $v_0 \times \cos\alpha$

Dans le triangle : $\sin\alpha = \frac{v_{0y}}{v_0}$ donc $v_{0y} = v_0 \times \sin\alpha$ = constante2

Equations horaires pour le vecteur vitesse $\vec{v}$:

Chute libre avec vitesse initiale $\vec{v}$
$$\begin{cases} v_x = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y = -9{,}81t + v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$$

c) Détermination du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

M est le centre de la boule. On veut déterminer les coordonnées x et y du vecteur position $\overrightarrow{OM}$
Il faut se souvenir que x et y sont les primitives de v_x et v_y puisque : $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$

Pour x : On vient de voir que : v_x = $v_0 \times \cos\alpha$. Cherchons la primitive de v_x par rapport au temps.
$v_0 \times \cos\alpha$ est une constante puisque v_o et α sont des données de départ. Donc la primitive de cette constante est : x = $(v_0 \times \cos\alpha) \cdot t + constante\,3$

On détemine constante3, en relevant la valeur de x à t=0. A t=0, la boule est à l'origine donc : constante3 = 0 et : x = $(v_0 \times \cos\alpha) \cdot t$

Pour y :
On vient de voir que : v_y = - 9,81t + $v_0 \times \sin\alpha$. Cherchons la primitive de cette expression par rapport au temps. y = $-(\frac{1}{2}) \cdot 9{,}8 \cdot t^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \cdot t + constante\,4$
On détemine constante4, en relevant la valeur de y à t=0. A t=0, la boule est à l'origine donc : constante4 = 0 et : y = $-(\frac{1}{2}) \cdot 9{,}8 \cdot t^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \cdot t$
Ouf ! On a trouvé les équations horaires pour les coordonnées du vecteur position :

Equations horaires pour le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

Chute libre avec vitesse initiale $\overrightarrow{OM}$
$$\begin{cases} x = (v_0 \times \cos\alpha) \cdot t \\ y = -(\frac{1}{2}) \cdot g \cdot t^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \cdot t \end{cases}$$

On en reste là. Il nous reste à trouver l'équation de la trajectoire.

3) Etablissement de l'équation de la trajectoire y=f(x) d'un projectile en chute libre ayant une vitesse initiale

Nous en étions resté aux équations horaires pour le vecteur position d'un projectile lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ et un angle α :

Chute libre avec vitesse initiale $\overrightarrow{OM}$
$$\begin{cases} x = (v_0 \times \cos\alpha) t \\ y = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g \cdot t^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \cdot t \end{cases}$$

Nous avons donc 2 équations : celle de x en fonction du temps t et celle de y en fonction du temps t. On veut obtenir l'équation de la trajectoire y=f(x) : il faut donc se " débarasser " de t par manipulation de ces 2 équations. Isolons t pour la première équation :

$$t = \frac{x}{(v_0 \times \cos\alpha)}$$

Injectons maintenant cette expression de t dans la deuxième équation : on y remplace t par $\frac{x}{(v_0 \times \cos\alpha)}$. On obtient : $y = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + (v_0 \times \sin\alpha) \cdot \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)$

Quelques simplifications sont possibles (car tan α = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$), soit :

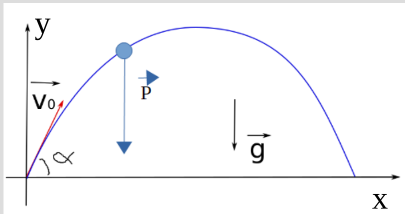
Equation de la trajectoire d'un projectile.

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right) g \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha \, x$$

Si l'on avait traité un cas où le projectile ne partait pas de l'origine O mais d'un point quelconque de coordonnées $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$, on aurait l'équation de la trajectoire la plus générale :

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right) g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha \, x + y_0$$

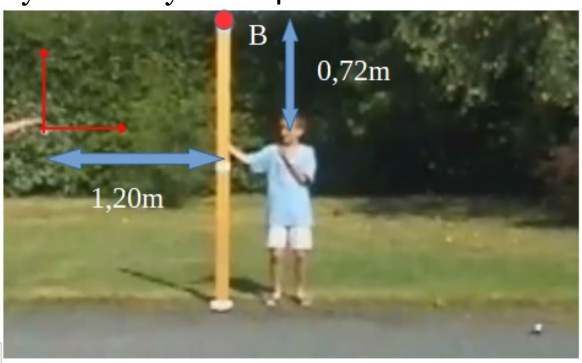
Cette fonction a pour représentation graphique : une portion de parabole (en bleu sur l'image ci-contre)



Remarque : L'équation que nous venons d'obtenir est du type : $y = a.x^2 + b.x + c$. C'est une équation du second degré.

4) Exploitation de l'équation de la trajectoire d'un projectile en chute libre ayant une vitesse initiale

A quoi peut servir cette équation ? Elle va servir à connaître à l'avance le chemin exact que va parcourir le projectile à condition que l'on connaisse sa vitesse initiale $\vec{v_0}$ et son angle de lansement α. Par exemple, je me demande, avant de lancer ma boule de pétanque, si elle va passer au dessus du sommet B de la barre en bois de coordonnées x_B = 1,20 m et y_B = 0,72 m dans le système d'axes choisi : voir photo) , la boule a une vitesse initiale de 5,2 m/s et un angle de 65,5°. La boule ayant un rayon de 4 cm.

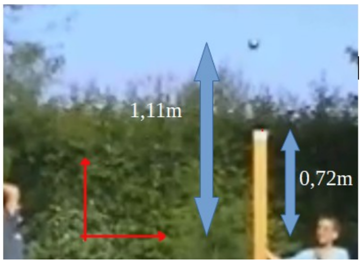


L'équation de la trajectoire est :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x$$

Calculons l'ordonnée y de la boule lancée pour x = 1,2 m

$y = -\frac{1}{2} . 9,81 . \frac{1,2^2}{5,2^2 \cos^2 65,5} + (\tan 65,5).(1,2)$ = 1,11m

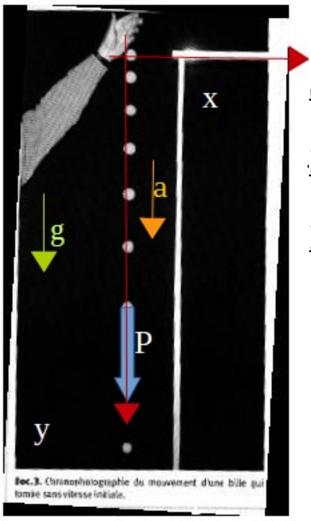


La boule sera à 1,11m lorsqu'elle passera au dessus de la barre. Elle va bien passer au-dessus puisque 1,11 >0,72 :

Voilà à quoi cette équation peut servir. On verra d'autres calculs en exercice. Voyons pour s'entrainer une autre application de la deuxième loi de Newton dans le cas d'une chute libre sans vitesse initiale. Cela va être plus simple !

5) Equations horaires d'un projectile en chute libre sans vitesse initiale

La situation est simple : on fait tomber un objet sans lui donner de vitesse. On suppose qu'il n'est soumis qu'à son poids (force de frottements négligeable au début de la chute). Voici un exemple de chronophotographie avec une boule de bois :



Appliquons exactement la même méthode que précédemment .

Système : boule Référentiel : terrestre (galiléen)

Bilan des forces : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (g = 9,8 m.s^{-2})

Deuxième loi de Newton : $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

ici la somme des forces se résume à $\vec{P}$ donc $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$

donc

$\vec{a} = \vec{g}$ CHUTE LIBRE

On retrouve la même expression que précédemment : en chute libre (avec vitesse ou sans) l'accélération est la même pour tout corps quelle que soit sa masse.

Les coordonnées du vecteur accélération sont donc : $\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 9,8 \end{cases}$ (axe Oy vers le bas)

Les cooordonnées du vecteur vitesse sont obtenues par recherche des primitives de a_x et a_y par rapport au temps.

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 9,8\,t \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur position sont donc : $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} 9,8 t^2 \end{cases}$

On retrouve les équations bien connues de la chute libre sans vitesse initiale. Par exemple, après 2 secondes de chute (supposée sans frottements), un objet est tombé de :

$$y = \frac{1}{2} 9,8 \times 2^2 = 19,6\,m$$