3. <u>vitesse instantanée</u> $\vec{v}$

Nous avons défini précédemment la vitesse instantanée moyenne v_{moy}. Voyons maintenant la vitesse instantanée v_t . Eh, oui ! Il y a une différence. Attention, il y a pas mal de notions mathématiques utilisées dans cette partie. Une petite révision de la notion de dérivée vue en maths serait bien utile. En particulier, il faut connaître par cœur les dérivées de quelques fonctions courantes :

Fonction f(x)	ax + b	x^2	x^3	a
Dérivée f'(x)	a	2x	$3x^2$	0

3.1 <u>Définition</u>

Les vitesses calculées précédemment étaient des moyennes assez approximatives : pour v_{moy1} par exemple, on remarque bien sur la figure 1 page 1 que MoM_1 est plus petit que M_1M_2. Pour avoir une valeur exacte de la vitesse à l'instant t_1, il faudrait connaître la position du mobile juste avant M_1 et juste après M_1 ainsi que la durée très courte qui se serait écoulée entre ces 2 positions. La vitesse à l'instant t_1 est donc la vitesse moyenne lorsque la durée Δt est infiniment courte soit :

$$\overrightarrow{v_{t1}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}\right)$$ (lire : « vecteur v_{t1} égal à la limite de delta du vecteur OM_1 sur delta t quand delta t tend vers zéro)

si on généralise à n'importe quel instant t_i :

$$\overrightarrow{v_{ti}} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\overrightarrow{OM_i}}{\Delta t}\right)$$ (ajoutez les points sur les i !)

cette limite correspond en mathématique à la valeur dérivée qui se note :

$$\overrightarrow{v_{ti}} = \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \quad \text{et plus généralement à la dérivée : } \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

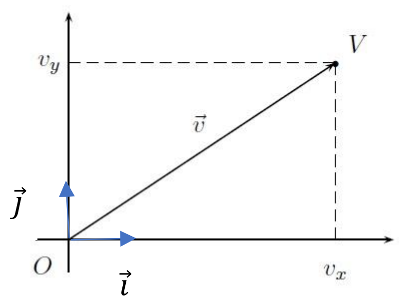
<u>Conclusion</u> : le vecteur vitesse instantanée est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

J'admets que tout ceci est bien abstrait. Vous devez connaître la définition précédente. Nous allons voir comment elle s'applique concrètement plus tard. En mathématique, vous connaissez la notion de dérivée d'une fonction. Par exemple, soit la fonction f(x) = 3x + 2. Sa dérivée est f'(x) = 3. En maths, vous avez pour l'instant l'habitude d'utiliser le prime ' pour représenter la dérivée de la fonction. Il existe aussi la notation « d quelque chose/ dt » pour représenter la dérivée d'une fonction (ici par rapport au temps t). Pour l'exemple f(x) = 3x + 2, j'ai dérivé par rapport à x. Je pouvais aussi écrire : $\frac{df(x)}{dx} = 3$. C'est pareil (un peu mieux peut-être car on sait par rapport à quoi on dérive). Pour l'étude des mouvements, on aura des positions, des vitesses et des accélérations qui vont dépendre du temps. Par exemple, on pourrait avoir la position OM (sur une ligne droite pour prendre un cas simple) d'un mobile M qui dépend du temps de cette façon : $OM(t) = 3t + 2$. Sa vitesse instantanée est la dérivée de OM par rapport au temps donc v $= \frac{dOM}{dt} =$ 3.

3.2 <u>Coordonnées du vecteur vitesse</u>

On a vu que : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$ et que : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

soit : $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$ or $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$ (voir ci-contre)



donc les coordonnées v_x et v_y du vecteur vitesse sont :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Et on rappelle que la valeur ou norme de v est : v $= \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ (Pythagore)

Exemple : Soit un mobile dont les coordonnées lors d'un mouvement vérifient les équations suivantes :

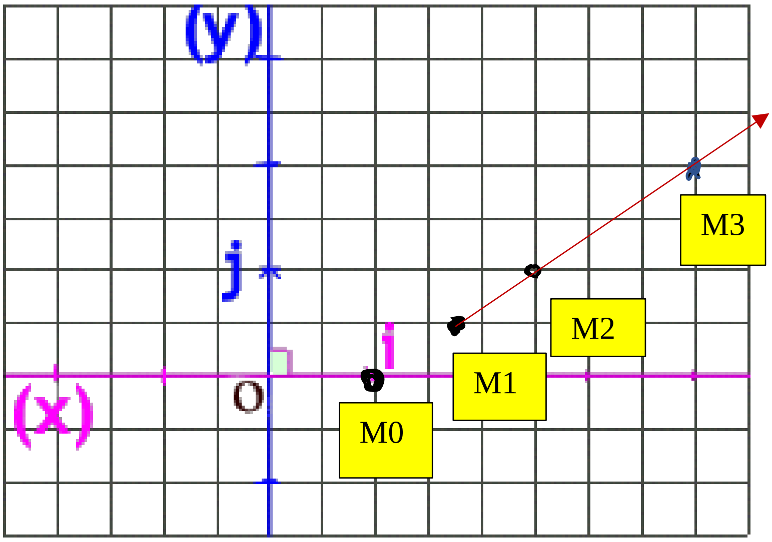
$x = 3t + 1$ et $y = 2t$

Calculer les coordonnées du mobile aux instants t suivants :

t(s)	0	0,25	0,5	1
x(cm)	$3 \times 0 + 1 = 1$	$3 \times 0{,}25 + 1 = 1{,}75$	$3 \times 0{,}5 + 1 = 2{,}5$	$3 \times 1 + 1 = 4$
y(cm)	$2 \times 0 = 0$	$2 \times 0{,}25 = 0{,}5$	$2 \times 0{,}5 = 1$	$2 \times 1 = 2$

Placer les 4 points dans le repère suivant :

Fait en noir et jaune.



Déterminer v_x en trouvant la dérivée de x par rapport au temps

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3$$

Déterminer v_y en trouvant la dérivée de y par rapport au temps

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2$$

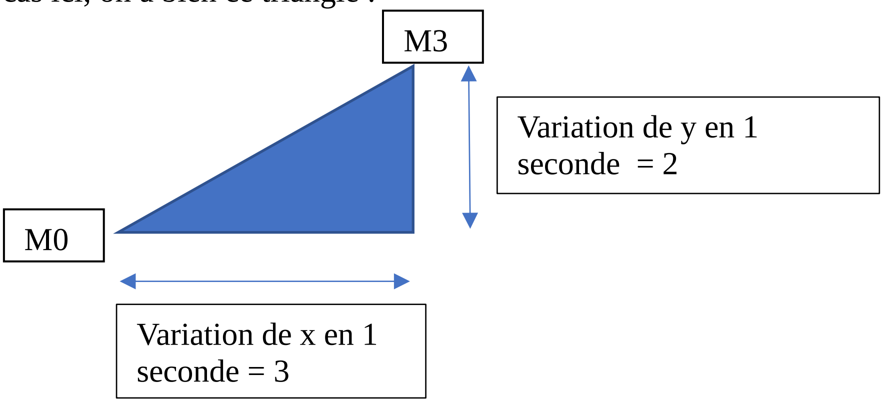
En déduire la norme de v :

$$v = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}6\ m.s^{-1}$$

Tracer $\overrightarrow{v_{0,25}}$

Le vecteur vitesse à l'instant t = 0,25 s a donc une valeur 3,6 m/s (pour ce mouvement, la vitesse est constante). Il faut se choisir une échelle pour représenter les vecteurs vitesse. On fait en sorte qu'avec l'échelle choisie, le vecteur vitesse ne soit pas trop petit, ni trop long. Ici, une échelle simple de 1 cm pour 1 m/s impose un vecteur $\overrightarrow{v_{0,25}}$ de longueur 3,6 cm. Il faut le tracer en partant du point M1 qui correspond à l'instant t =0,25s. Je l'ai représenté en rouge.

Remarque : Il faut essayer pour comprendre de mettre des mots sur les équations. Par exemple, l'équation : $v_x = \frac{dx}{dt} = 3$ signifie que x varie de 3 à chaque seconde et $v_y = \frac{dy}{dt} = 2$ signifie que y varie de 2 à chaque seconde. C'est bien le cas ici, on a bien ce triangle :



C'est tout pour l'instant, au cours prochain, ça va accélérer !!!