À la date $t = 0$, la balle quitte la crosse au point B avec le vecteur vitesse $\vec{v_B}$ contenu dans le plan (xOz) comme le montre le schéma.
On néglige toutes les actions dues à l'air. Le mouvement du centre de la balle est étudié dans le champ de pesanteur supposé uniforme.
Le système d'axes utilisé est représenté sur le schéma ci-dessous : l'axe (Ox) est horizontal dirigé vers la droite, l'axe (Oz) est vertical et dirigé vers le haut.
L'origine des axes est située à la verticale du point B telle que $OB = h = 0{,}40$ m.

1. Exprimer les coordonnées v_{B_x} et v_{B_z} du vecteur vitesse $\vec{v_B}$ du centre G de la balle à l'instant $t = 0$ s, en fonction de v_B et de α.
2. Quelles sont les coordonnées x_B et z_B du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ de la balle au point B ?
3. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'on obtient les équations suivantes :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{cases} v_x = v_B \cdot \cos\alpha \\ v_z = -g \cdot t + v_B \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

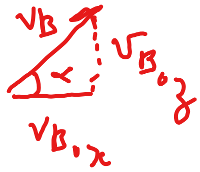
4. Montrer que la valeur v_S de la vitesse du point G au sommet S de la trajectoire est :
$v_S = 12{,}1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
5. Montrer que les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre G de la balle sont les suivantes :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t \\ z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + h \end{cases}$$

6. En déduire l'équation de la trajectoire du point G.
7. La ligne de but est située à une distance $d = 15{,}0$ m du point O. La hauteur du but est $L = 2{,}14$ m. On néglige le diamètre de la balle devant la hauteur du but.
Le but est-il marqué ?

Données : $g = 9{,}81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_B = 14{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 30°$

1) $\vec{v_{B_0}}\begin{cases} v_{B_{0x}} = v_B \cos\alpha \\ v_{B_{0z}} = v_B \sin\alpha \end{cases}$



2) $\overrightarrow{OB}\begin{cases} x = 0 \\ z = h \end{cases}$

3) $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

or $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$

primitives $\Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_{B_{0x}} = v_B \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_B \sin\alpha \end{cases}$

4) Au sommet $v_{S_z} = 0 \longrightarrow$

donc $v_S = v_B \cos\alpha = 14{,}0 \times \cos 30° = 12{,}1 \text{ m.s}^{-1}$

5) primitives de $\vec{v}$: $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (v_B \cos\alpha)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_B \sin\alpha)t + h \end{cases}$

6) $t = \dfrac{x}{v_B \cos\alpha} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{(v_B \cos\alpha)^2} + (\tan\alpha)x + h$

7) On calcule z pour $x = 15{,}0$ m

On trouve $z = -0{,}5 \times 9{,}81 \times \dfrac{15^2}{(14{,}0 \times \cos 30°)^2} + (\tan 30°) \times 15 + h$

$z = 1{,}55$ m but marqué.